Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

**Année : 2007/2008**
**Analyse 2 : SMA-SMI**

**Contrôle continu N$^0$ 1**

*(Durée : 1h 30 mn)*

**Les réponses doivent être concises et précises.**

**Exercice 1.** ( 7 points) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \log(1+t^2)dt.$$

1) Justifier l'existence de $I_n$ et de $J_n$.

2) Montrer que les suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont décroissantes.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n$.

4) En intégrant par parties $J_n$ montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$J_n = \frac{\log 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}.$$

En déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (nJ_n)$.

**Exercice 2.** ( 7 points) Soit $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}.$$

1) (i) Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergent.
*Indication : Utiliser des fonctions équivalentes.*

(ii) En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

2) (i) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\quad 1 + t \leq e^t$.

(ii) En déduire que, pour tout $t > 0$, $\quad 0 < f(t) \leq t$.

(iii) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt}dt$.
En utilisant 2)(ii), montrer que l'intégrale généralisée $I_n$ converge.

**Exercice 3.** ( 6 points) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}.$$





**1)** **(i)** Montrer que la suite $(f_n)_{n\in I\!N^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ que l'on déterminera.

**(ii)** Soit $n \in I\!N^\star$ et posons, $g_n = f - f_n$. Montrer que $g_n$ est impaire et donner le tableau des variations de $g_n$ sur $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

**(iii)** En utilisant 1)(ii), déduire que $(f_n)_{n\in I\!N^\star}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$.

**2)** En utilisant 1)(iii), déduire que la suite réelle $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in I\!N^\star}$ converge et calculer sa limite.






ETUSUP.com